

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

نخستین درس در جبر خطی عددی

نخستین درس در جبر خطی عددی

مسعود حجاریان

۱۳۹۴

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

و همسر عزیزم

فهرست

پیشگفتار	یازده
۱ مفاهیم مقدماتی	۱
۱.۱ مروری بر جبر خطی	۱
۲.۱ ضرب داخلی و تعامد	۱۵
۱.۲.۱ ضرب داخلی	۱۵
۲.۲.۱ تعامد	۱۷
۳.۱ تجزیه شر، تجزیه حقیقی شر و فرم کانونی جردن	۲۳
۴.۱ ماتریس‌های خاص	۲۸
۵.۱ نرم و همگرایی	۳۶
۱.۵.۱ نرم بردارها	۳۶
۲.۵.۱ نرم ماتریس‌ها	۴۰
۳.۵.۱ همگرایی دنباله‌ها و سری‌های ماتریسی	۴۷
۶.۱ تجزیه مقادیر منفرد	۴۸
۷.۱ وارون تعمیم یافته مور-پنروز	۶۰
۸.۱ هزینه محاسباتی الگوریتم‌های عددی	۶۲
۹.۱ تمرین	۶۲
۲ روش‌های مستقیم برای حل دستگاه‌های معادلات خطی	۷۷
۱.۲ مروری بر دستگاه‌های معادلات خطی	۷۷
۲.۲ روش حذفی گاوس	۸۳
۳.۲ تجزیه LU	۹۱
۱.۳.۲ تجزیه LU دولیتل و کروت	۹۵
۴.۲ محورگیری	۹۷
۱.۴.۲ روش حذفی گاوس با محورگیری پاره‌ای	۹۹
۲.۴.۲ روش حذفی گاوس با محورگیری کامل	۱۰۴
۵.۲ آنالیز خطای دستگاه‌های معادلات خطی	۱۰۸
۱.۵.۲ آنالیز خطای روش حذفی گاوس	۱۱۱
۶.۲ تجزیه LDM^T	۱۱۴
۷.۲ تجزیه چولسکی	۱۱۶

۱۱۸	فرم ضرب خارجی تجزیه چولسکی	۱.۷.۲
۱۱۹	تجزیه QR	۸.۲
۱۲۲	تبدیلات هاوس هولدر	۱.۸.۲
۱۴۰	تجزیه هسنبرگ	۹.۲
۱۴۶	تجزیه‌های بلوکی	۱۰.۲
۱۴۷	تجزیه‌های LU و LDM^T بلوکی	۱.۱۰.۲
۱۴۸	تجزیه چولسکی بلوکی	۲.۱۰.۲
۱۴۹	حالت مختلط تبدیلات هاوس هولدر و دوران‌های گیونز	۱۱.۲
۱۵۰	بهبود تکراری برای دستگاه‌های معادلات خطی	۱۲.۲
۱۵۵	محاسبه وارون یک ماتریس	۱۳.۲
۱۵۸	آنالیز آشفتگی دستگاه‌های معادلات خطی	۱۴.۲
۱۶۴	تمرین	۱۵.۲
۱۷۳		روش‌های تکراری برای حل دستگاه‌های معادلات خطی	۳
۱۷۴	روش‌های تکراری کلاسیک	۱.۳
۱۷۸	آنالیز همگرایی روش‌های تکراری کلاسیک	۱.۱.۳
۱۷۹	آنالیز همگرایی روش‌های ژاکوبی و گاوس-سایدل	۲.۱.۳
۱۸۲	آنالیز همگرایی روش SOR	۳.۱.۳
۱۸۶	سرعت همگرایی روش‌های تکراری کلاسیک	۴.۱.۳
۱۸۷	روش ریچاردسون	۵.۱.۳
۱۸۹	روش‌های نیمه تکراری و شتاب چیشف	۶.۱.۳
۱۹۴	روش فوق تخفیف متوالی متقارن	۷.۱.۳
۱۹۵	روش فوق تخفیف شتابدار	۸.۱.۳
۱۹۶	روش‌های زیرفضای کرلیف	۲.۳
۱۹۷	روش گرادیان مزدوج	۱.۲.۳
۲۱۵	روش کمترین باقیمانده تعمیم یافته	۲.۲.۳
۲۲۱	تمرین	۳.۳
۲۲۷		روش‌های عددی برای حل مسائل کمترین مربعات خطی و غیرخطی	۴
۲۳۱	روش‌های محاسبه جواب مسئله کمترین مربعات خطی	۱.۴
۲۳۱	محاسبه جواب مسئله کمترین مربعات خطی با استفاده از تجزیه چولسکی	۱.۱.۴
۲۳۳	محاسبه جواب مسئله کمترین مربعات خطی با استفاده از تجزیه QR	۲.۱.۴
۲۳۹	محاسبه جواب مسئله کمترین مربعات خطی با استفاده از SVD	۳.۱.۴
۲۴۱	روش‌های محاسبه جواب دستگاه‌های فرومعین	۲.۴
۲۴۴	محاسبه جواب دستگاه‌های فرومعین رتبه کامل با استفاده از تجزیه QR	۱.۲.۴
۲۴۵	بهبود تکراری برای مسئله کمترین مربعات خطی	۳.۴
۲۴۹	آنالیز آشفتگی مسئله کمترین مربعات خطی	۴.۴
۲۵۳	مسئله کمترین مربعات غیرخطی	۵.۴
۲۵۵	روش گاوس-نیوتن	۱.۵.۴
۲۵۷	روش نیوتن	۲.۵.۴
۲۵۸	تمرین	۶.۴

۲۶۵	روش‌های محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه	۵
۲۶۶	۱.۵ مکان‌یابی مقادیر ویژه	
۲۷۷	۲.۵ روش‌های تکراری برای محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه	
۲۷۷	۱.۲.۵ روش توانی	
۲۸۴	۲.۲.۵ روش توانی وارون انتقال یافته	
۲۹۱	۳.۲.۵ روش تکرار خارج قسمت رایلی	
۲۹۳	۴.۲.۵ فرایند تقلیل	
۲۹۶	۵.۲.۵ روش ژاکوبی	
۳۰۳	۶.۲.۵ الگوریتم LU	
۳۰۷	۷.۲.۵ الگوریتم QR	
۳۱۰	۸.۲.۵ الگوریتم هسنبرگ-QR	
۳۱۴	۹.۲.۵ الگوریتم هسنبرگ-QR انتقال یافته	
۳۲۳	۱۰.۲.۵ الگوریتم لانچوز	
۳۲۶	۱۱.۲.۵ الگوریتم تقسیم و غلبه	
۳۳۸	۳.۵ مسئله مقدار ویژه تعمیم یافته	
۳۴۲	۱.۳.۵ الگوریتم QZ برای (A, B)	
۳۴۸	۴.۵ مسئله مقدار ویژه درجه دوم	
۳۴۹	۵.۵ روش‌های محاسبه تجزیه مقادیر منفرد	
۳۵۰	۱.۵.۵ الگوریتم گالوب-کاهان-اینش برای محاسبه تجزیه مقادیر منفرد	
۳۵۷	۲.۵.۵ الگوریتم تقسیم و غلبه برای محاسبه تجزیه مقادیر منفرد	
۳۶۰	۶.۵ تمرین	
۳۶۷	۶ مباحث ویژه در جبر خطی عددی	
۳۶۷	۱.۶ ضرب کرونکر	
۳۷۵	۱.۱.۶ کاربرد ضرب کرونکر در حل معادلات ماتریسی	
۳۸۰	۲.۶ پیش‌شرط سازی	
۳۸۱	۱.۲.۶ روش گرادیان مزدوج پیش‌شرط ساز شده	
۳۸۵	۲.۲.۶ روش کمترین باقیمانده تعمیم یافته پیش‌شرط ساز شده	
۳۸۷	۳.۶ توابع ماتریسی	
۳۸۹	۱.۳.۶ تعریف $f(A)$ با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب	
۳۹۰	۲.۳.۶ تعریف توابع ماتریسی با استفاده از فرم کانونی جردن	
۳۹۲	۳.۳.۶ تعریف توابع ماتریسی با استفاده از فرمول انتگرال کوشی	
۳۹۳	۴.۳.۶ تعریف توابع ماتریسی با استفاده از سری‌های توانی	
۳۹۵	۴.۶ تمرین	
۳۹۸	منابع	
۴۰۷	واژه‌نامه فارسی - انگلیسی	
۴۱۳	واژه‌نامه انگلیسی - فارسی	
۴۱۹	نمایه	

پیشگفتار

از سال ۱۹۴۶ میلادی که اولین رایانه مدرن تولید شد، جبرخطی عددی، که محاسبات ماتریسی نیز نامیده می‌شود، جایگاه مهم و بی نظیری در علوم کاربردی و مهندسی یافت. اهمیت و کاربردهای ویژه جبرخطی عددی در مسائل کاربردی که غالباً اندازه‌های بزرگ نیز دارند، انکار ناپذیر است. امروزه کمتر مهندس یا دانش آموخته‌ای در رشته‌های کاربردی را می‌شناسیم که در حل مسائل موجود در رشته خود نیازی به حل دستگاه‌های معادلات خطی، یافتن مقادیر و بردارهای ویژه یک ماتریس و یا تقریب مقادیر یک تابع با استفاده از روش‌های عددی نداشته باشد. از آنجا که تا کنون به زبان فارسی آثار چندانی در زمینه جبرخطی عددی تألیف نشده است، بر آن شدم تا با بررسی متون مختلف و نوین در این زمینه، کتابی جامع و به روز را تألیف کنم که نیاز دانشجویان عزیز رشته‌های مختلف را برآورده کند. در تهیه این کتاب سعی کرده‌ام تقریباً همه مطالبی را که برای ارائه یک درس در مقاطع کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکترا لازم است بیان کنم تا با توجه به سرفصل‌های مقاطع مختلف و کاربردهای مطالب گوناگون، برای بیشتر خوانندگان عزیز قابل استفاده باشد. این کتاب شامل شش فصل است که در ادامه، به مطالب هر فصل اشاره‌های مختصر خواهم داشت. همه فصل‌ها را می‌توان به عنوان یک درس در مقاطع کارشناسی ارشد و دکترا مطالعه یا تدریس کرد. اما برای تدریس این کتاب به عنوان یک درس در دوره کارشناسی بدون اینکه به بیان سایر مطالب آسیبی وارد شود، می‌توان برخی از قسمت‌های هر فصل را بیان نکرد که در ادامه به آن‌ها نیز به صورت مشخص اشاره خواهم کرد.

در فصل ۱ نخست مروری بر مفاهیم مهم جبرخطی داشته‌ایم. از آنجا که این قسمت پایه و اساس بیان قسمت‌های بعدی کتاب است، باید به دقت مطالعه شود. سپس ضرب داخلی و تعامد در فضاهای برداری و تجزیه شر، تجزیه حقیقی شر و فرم کانونی جردن بیان شده است. تجزیه شر، تجزیه حقیقی شر و فرم کانونی جردن باید در مقاطع کارشناسی ارشد و دکترا به صورت کامل مطالعه شوند، اما در مقطع کارشناسی فقط تجزیه شر نیاز به مطالعه دارد. در ادامه این فصل، نرم برداری، نرم ماتریسی و همگرایی دنباله‌ها و سری‌های ماتریسی معرفی و بررسی شده‌اند. در مقطع کارشناسی لزومی به مطالعه اثبات پیوستگی و هم‌ارزی نرم‌ها نیست. تجزیه مقادیر منفرد با توجه به کاربردهای مهم آن، قسمت مهمی از فصل اول است. در مقطع کارشناسی تأکید بر آشنایی با تجزیه مقادیر منفرد و محاسبه آن است، بنابراین نیازی به مطالعه قسمت‌های پایانی بخش مربوط به تجزیه مقادیر منفرد این فصل نیست. در پایان فصل

اول وارون تعمیم یافته به اختصار معرفی شده است.

فصل ۲ یکی از مهم‌ترین فصل‌های این کتاب است که در آن روش‌های مستقیم برای حل دستگاه‌های معادلات خطی بیان و بررسی شده است. پس از مروری بر دستگاه‌های معادلات خطی، نخست روش حذفی گاوس و تجزیه معرفی شده‌اند. سپس محورگیری و آنالیز خطای دستگاه‌های معادلات خطی بیان شده‌اند. در مقطع کارشناسی نیازی به مطالعه کامل این دو مطلب نیست و می‌توان به‌طور خلاصه آن‌ها را مطالعه کرد. در ادامه تجزیه‌های LDM^T و چولسکی معرفی شده‌اند. در مقطع کارشناسی نیازی به مطالعه فرم ضرب خارجی تجزیه چولسکی نیست. در بخش بعدی با معرفی تبدیلات هاوس هولدر و دوران‌های گیونز، چگونگی محاسبه تجزیه‌های QR و هسنبرگ را شرح داده‌ایم. سپس تجزیه‌های بلوکی، حالت مختلط تبدیلات هاوس هولدر و دوران‌های گیونز و بهبود تکراری برای دستگاه‌های معادلات خطی معرفی شده‌اند که در مقطع کارشناسی نیازی به مطالعه آن‌ها نیز نخواهد بود. محاسبه وارون ماتریس‌ها بخش دیگری است که در این فصل بیان شده است. در پایان این فصل آنالیز آشفتگی دستگاه‌های معادلات خطی بررسی شده است که در مقاطع کارشناسی ارشد و دکترا باید با تأکید بیشتری مطالعه شود.

فصل ۳ به معرفی روش‌های تکراری برای حل دستگاه‌های معادلات خطی پرداخته است. این فصل از دو بخش اصلی تشکیل شده است. در بخش اول روش‌های تکراری کلاسیک برای یافتن جواب دستگاه‌های معادلات خطی معرفی شده و همگرایی آن‌ها به‌صورت کامل بررسی شده است. این روش‌ها شامل ژاکوبی، گاوس-سایدل و SOR هستند. البته روش‌های ریچاردسون، نیمه تکراری، فوق تخفیف متقارن و فوق تخفیف شتابدار را نیز به عنوان زیرمجموعه‌ای از روش‌های تکراری کلاسیک بیان و بررسی کرده‌ایم که در مقطع کارشناسی نیازی به مطالعه آن‌ها نیست. در بخش دوم این فصل به بیان روش‌های زیرفضای کرلیف پرداخته و دو روش مهم گرادیان مزدوج و کمترین باقیمانده تعمیم یافته را معرفی و همگرایی آن‌ها را بررسی می‌کنیم. در مقطع کارشناسی فقط یک آشنایی مختصر با روش‌های زیرفضای کرلیف مورد نیاز است.

در فصل ۴ مسائل کمترین مربعات خطی و غیر خطی مطالعه شده‌اند. پس از شرح شرایط لازم برای جواب داشتن مسئله کمترین مربعات خطی، روش‌هایی بر پایه تجزیه چولسکی، تجزیه QR و تجزیه مقادیر منفرد برای یافتن جواب این مسئله معرفی شده‌اند. سپس دستگاه‌های فرومیین را بررسی می‌کنیم و با استفاده از تجزیه QR، روشی برای محاسبه جواب این دستگاه‌ها ارائه می‌کنیم. مشابه آنچه که برای دستگاه‌های معادلات خطی گفته شد، بهبود تکراری و آنالیز آشفتگی را برای مسئله کمترین

مربعات خطی بیان می‌کنیم که در مقطع کارشناسی نیازی به مطالعه آن‌ها نمی‌باشد. در انتهای این فصل مسئله کمترین مربعات غیرخطی را معرفی کرده و دو روش تکراری گاوس-نیوتن و نیوتن را برای حل آن ارائه می‌کنیم. این قسمت نیز در مقطع کارشناسی نیازی به مطالعه ندارد.

فصل ۵ به بررسی مقادیر و بردارهای ویژه و محاسبه آن‌ها می‌پردازد. نخست چگونگی مکان‌یابی مقادیر ویژه را شرح می‌دهیم و سپس آنالیز آشفتگی مقادیر و بردارهای ویژه را بیان می‌کنیم. مطالعه مختصر آنالیز آشفتگی مقادیر و بردارهای ویژه برای دانشجویان مقطع کارشناسی لازم است. در ادامه این فصل به معرفی روش‌های تکراری برای محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه می‌پردازیم. این روش‌ها عبارت‌اند از: روش توانی، روش توانی وارون انتقال یافته، روش تکرار خارج قسمت رایلی، روش ژاکوبی، الگوریتم LU، الگوریتم QR، الگوریتم هسنبِرگ-QR، الگوریتم هسنبِرگ-QR انتقال یافته، الگوریتم لانچوز، الگوریتم تقسیم و غلبه. شایان ذکر است که در مقطع کارشناسی فقط مطالعه روش‌های توانی، توانی وارون انتقال یافته و ژاکوبی همراه با قضیه‌های همگرایی و الگوریتم‌های LU و QR بدون قضیه‌های همگرایی مورد نیاز است. همچنین در این فصل مسائل مقدار ویژه تعمیم یافته و مقدار ویژه درجه دوم معرفی و الگوریتم QZ برای حل مسئله مقدار ویژه تعمیم یافته ارائه شده است. در پایان این فصل الگوریتم‌های گالوب-کاهان-راینش و تقسیم و غلبه برای یافتن تجزیه مقادیر منفرد ارائه شده است. مطالعه مسائل مقدار ویژه تعمیم یافته و مقدار ویژه درجه دوم و الگوریتم‌های گالوب-کاهان-راینش و تقسیم و غلبه صرفاً برای مقاطع کارشناسی ارشد و دکترا ضرورت دارد.

فصل آخر کتاب به سه مبحث ویژه ضرب و جمع کرونکر و کاربرد آن در حل معادلات ماتریسی، پیش‌شرط سازی دستگاه‌های معادلات خطی و توابع ماتریسی اختصاص دارد. این فصل در مقطع کارشناسی نیازی به مطالعه ندارد و می‌تواند به عنوان سمینار به دانشجویان واگذار شود.

شایان ذکر است در پایان هر فصل تمرین‌های متنوع و هدفمندی مربوط به بخش‌های مختلف آن فصل گردآوری شده که یافتن جواب آن‌ها در تسلط یابی و درک عمیق مطالب گفته شده تأثیر بسیار زیادی خواهد داشت. همچنین دستورات مهمی از نرم‌افزار متلب برای برخی از قسمت‌های این کتاب بیان شده است.

بر خود لازم می‌دانم از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مهدی دهقان که با دقت و حوصله بسیار نسخه اولیه کتاب را مطالعه کردند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. از حمایت‌های بی‌دریغ جناب آقای دکتر سهرابعلی یوسفی ریاست محترم دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی بسیار سپاسگزارم.

از همسر مهربان و فداکارم که مشوق اصلی من برای تألیف این کتاب بود صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایم. در پایان از مدیریت و کارکنان محترم مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه شهید بهشتی تشکر و قدرانی می‌کنم. امید است که با لطف پروردگار یکتا که جز در سایه توجهات و یاری همیشگی‌اش این مهم میسر نمی‌شد این کتاب زمینه ساز رشد و شکوفایی هر چه بیشتر جبرخطی عددی در دانشگاه‌های سراسر میهن عزیزمان شود.

مسعود حجاریان
پاییز ۱۳۹۴