

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

محاسبات عددی

ویراست دوم

محاسبات عددی

ویراست دوم

دکتر سید ابراهیم افجه‌ای

۱۳۹۵

تقدیم به پدرم،
سیدقاسم افجه‌ای،
که همواره یار و یاورم بوده است.

فهرست مطالب

پانزده	پیشگفتار
۱	فصل ۱: سری تیلور
۱	مقدمه
۱	۱.۱. سری تیلور تابعی از یک متغیر
۶	۲.۱. سری تیلور تابعی از دو متغیر
۱۰	مسائل
۱۱	فصل ۲: حساب تفاضل محدود
۱۱	مقدمه
۱۱	۱.۲. تفاضل‌های پیشرو و پسرو
۱۶	۲.۲. تفاضل‌های مرکزی
۲۲	مسائل
۲۵	فصل ۳: درون‌یابی و برون‌یابی
۲۵	مقدمه
۲۵	۱.۳. درون‌یابی خطی
۲۶	۲.۳. تولید جداول تفاضلی
۲۹	۳.۳. فرمول درون‌یابی گرگوری - نیوتن
۳۴	۴.۳. درون‌یابی با استفاده از تفاضل‌های مرکزی
۳۶	۵.۳. درون‌یابی برای داده‌های با فواصل نامساوی و چندجمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ
۴۰	۶.۳. درون‌یابی با چندجمله‌ای چبی چف
۴۲	۷.۳. درون‌یابی به‌وسیلهٔ تابع درجهٔ سوم اسپلین
۴۷	۸.۳. درون‌یابی به‌وسیلهٔ چندجمله‌ای هرمیت
۴۹	۹.۳. درون‌یابی دو بعدی

۵۰	۱۰.۳. برون‌یابی
۵۴	مسائل
۵۷	فصل ۴: ریشه‌های معادلات
۵۷	مقدمه
۵۷	۱.۴. روش جستجوی افزایشی
۵۸	۲.۴. روش نصف کردن فاصله
۶۰	۳.۴. روش نیوتن رفسان
۶۲	۴.۴. روش نیوتن تعمیم یافته
۶۳	۵.۴. روش سکانت (وتر)
۶۴	۶.۴. روش نقطه ثابت
۶۶	۷.۴. روش بیراستو
۷۲	۸.۴. توابع چند متغیره
۷۲	۱.۸.۴. روش شبکه‌ای نصف کردن فاصله
۷۸	مسائل
۸۱	فصل ۵: حل دستگاه معادلات جبری
۸۱	مقدمه
۸۱	۱.۵. اصطلاحات و عملیات ابتدایی ماتریس‌ها
۸۳	۲.۵. نمایش ماتریسی و حل دستگاه‌های معادلات خطی
۸۵	۳.۵. حذف گاوسی و حذف گاوس جردنی
۸۹	۴.۵. حل دستگاه معادلاتی سه قطری
۹۲	۵.۵. تجزیه LU
۹۵	۶.۵. روش گاوس - سیدل و ژاکوبی
۹۶	۷.۵. حل دستگاه‌های غیرخطی (روش نیوتن - رفسان)
۱۰۸	مسائل
۱۱۱	فصل ۶: برازش منحنی با استفاده از حداقل مربعات و تقریب توابع پیوسته

۱۱۱	مقدمه
۱۱۱	۱.۶. روش حداقل (مینیمم) مربعات
۱۱۵	۲.۶. برازش منحنی با استفاده از ترکیب خطی چند تابع
۱۱۵	۳.۶. برازش منحنی با استفاده از یک چندجمله‌ای درجه سوم اسپلاین
۱۱۶	۴.۶. تقریب توابع پیوسته به وسیله یک چندجمله‌ای
۱۲۳	مسائل

فصل ۷: انتگرال گیری عددی

۱۲۵	مقدمه
۱۲۵	۱.۷. روش ذوزنقه‌ای
۱۲۹	۲.۷. روش سیمسون
۱۳۲	۳.۷. فرمول گاوس
۱۳۶	۴.۷. انتگرال‌های دوبل (دوگانه)
۱۳۶	۵.۷. انتگرال‌های نامعین
۱۳۷	۶.۷. حل مشکل نقاط منفرد
۱۴۳	مسائل

فصل ۸: حل عددی معادلات دیفرانسیل

۱۴۵	مقدمه
۱۴۶	۱.۸. روش اویلر
۱۴۸	۲.۸. روش‌های رانگ کوتاه
۱۴۸	۱.۲.۸. روش رانگ کوتای مرتبه دوم
۱۴۹	۲.۲.۸. روش رانگ کوتای مرتبه سوم
۱۴۹	۳.۲.۸. روش رانگ کوتای مرتبه چهارم
۱۵۰	۳.۸. معادله‌های آدامز
۱۵۰	۱.۳.۸. معادلات باز آدامز
۱۵۲	۲.۳.۸. معادلات بسته آدامز

۱۵۳ ۴.۸. روش‌های پیش‌بینی و تصحیح
۱۳ مسائل

۱۶۵ فصل ۹: مقادیر ویژه ماتریس‌ها

۱۶۵ مقدمه

۱۶۵ ۱.۹. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

۱۶۶ ۲.۹. روش توان

۱۶۸ ۳.۹. تعیین معادله مشخصه یک ماتریس

۱۶۹ ۱.۳.۹. روش بوچر

۱۷۰ ۲.۳.۹. روش ضرایب نامعین

۱۷۲ ۴.۹. روش‌های QR و LR برای به‌دست آوردن مقادیر ویژه ماتریس

۱۷۴ ۵.۹. تعیین بردار ویژه نظیر یک مقدار ویژه

۱۷۴ ۶.۹. به‌دست آوردن وارون یک ماتریس

۱۷۸ مسائل

۱۷۹ فصل ۱۰: حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به روش تفاضل محدود

۱۷۹ مقدمه

۱۸۰ ۱.۱۰. حل معادلات بیضوی در مختصات دکارتی

۱۸۲ ۲.۱۰. حل معادلات غیرخطی در مختصات دکارتی

۱۸۵ ۳.۱۰. حل معادلات بیضوی در مختصات استوانه‌ای

۱۸۷ ۴.۱۰. حل معادلات سهموی

۱۸۸ ۱.۴.۱۰. روش اول: روش اویلر (روش صریح)

۱۹۰ ۲.۴.۱۰. روش دوم: روش کرنک-نیکلسون (روش ضمنی)

۱۹۱ ۵.۱۰. حل معادلات سهموی غیرخطی به روش کرنک-نیکلسون

۱۹۳ ۶.۱۰. حل معادلات سهموی دو بعدی

۱۹۳ ۷.۱۰. حل معادلات هذلولوی

۲۰۵	فصل ۱۱ : مفاهیم اساسی در روش اجزاء محدود
۲۰۵	مقدمه
۲۰۵	۱.۱.۱. مسائل پیوسته
۲۰۷	۲.۱.۱. روش تغییراتی (ریتز)
۲۰۸	۳.۱.۱. روش باقیمانده وزنی (یا وزن دار)
۲۰۸	۱.۳.۱.۱. روش هم محلی (هم مکانی)
۲۰۹	۲.۳.۱.۱. روش زیردامنه‌ای
۲۰۹	۳.۳.۱.۱. روش گلرکین
۲۱۰	۴.۳.۱.۱. روش مینیمم مربعات
۲۱۱	۴.۱.۱. روش اجزاء محدود
۲۱۳	۵.۱.۱. روش مستقیم
۲۱۳	۱.۵.۱.۱. شبکه های الکتریکی
۲۱۸	۲.۵.۱.۱. سیستم خطی فنری
۲۲۳	۶.۱.۱. تقسیم ناحیه مسئله به نواحی کوچک تر
۲۲۴	۷.۱.۱. عناصر خطی یک بعدی
۲۲۷	۸.۱.۱. عناصر درجه دوم یک بعدی
۲۲۹	۹.۱.۱. تحلیل اجزاء محدود یک بعدی
۲۳۰	۱.۹.۱.۱. به دست آوردن معادلات اجزا به روش گلرکین
۲۳۴	۲.۹.۱.۱. به دست آوردن معادلات اجزا به روش گلرکین
۲۳۵	۱۰.۱.۱. حل کامل یک مسئله به روش اجزاء محدود
۲۳۹	۱۱.۱.۱. یافتن معادلات اجزاء برای یک معادله دیفرانسیل کلی (روش ریتز)
۲۴۰	۱۲.۱.۱. یافتن معادلات اجزاء برای یک معادله دیفرانسیل در مختصات استوانه‌ای
۲۴۲	۱۳.۱.۱. به کارگیری شرایط مرزی نوع سوم در روش اجزاء محدود
۲۴۳	۱۴.۱.۱. عناصر دو بعدی
۲۴۳	۱۵.۱.۱. تقسیم ناحیه مسئله به نواحی کوچک تر
۲۴۵	۱۶.۱.۱. عناصر خطی مثلثی

۲۴۷	۱۷.۱۱. عنصر خطی مستطیلی
۲۴۹	۱۸.۱۱. عنصر مثلثی مرتبه دوم
۲۵۰	۱۹.۱۱. تحلیل اجزاء محدود دو بعدی
۲۵۱	۱.۱۹.۱۱. به دست آوردن معادلات اجزاء به روش گلرکین
۲۵۵	۲.۱۹.۱۱. به دست آوردن معادلات اجزاء به روش تغییراتی (ریتز)
۲۵۷	۲۰.۱۱. حل یک مسئله دو بعدی به روش اجزاء محدود
۲۶۰	۲۱.۱۱. به کارگیری شرایط مرزی نوع سوم
۲۶۱	۲۲.۱۱. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای دو بعدی در مختصات استوانه‌ای
۲۶۲	۲۳.۱۱. معادلات میدان وابسته به زمان
۲۶۲	۲۴.۱۱. حل معادلات وابسته به زمان یک بعدی (روش گلرکین)
۲۶۳	۱.۲۴.۱۱. فرمول‌سازی سازگار
۲۶۵	۲.۲۴.۱۱. فرمول‌سازی فشرده
۲۶۷	۲۵.۱۱. روش تفاضل محدود در حوزه زمان
۲۷۱	۲۶.۱۱. نوسان‌های عددی
۲۷۳	مسائل

۲۷۹	فصل ۱۲: روش اجزاء مرزی
۲۷۹	مقدمه
۲۷۹	۱.۱۲. مفاهیم اصلی در روش اجزاء مرزی
۲۸۲	۲.۱۲. روش باقیمانده وزنی
۲۸۲	۱.۲.۱۲. روش هم‌محلی (هم‌مکانی) زیردامنه‌ای
۲۸۴	۲.۲.۱۲. روش هم‌محلی (هم‌مکانی) نقطه‌ای
۲۸۵	۳.۲.۱۲. روش گلرکین
۲۸۶	۳.۱۲. معادله پویسان دو بعدی
۲۸۹	۴.۱۲. حل مسائل در روش‌های مرزی
۲۹۲	۵.۱۲. فرمول‌سازی انتگرالی از معادله لاپلاس
۲۹۶	۶.۱۲. روش اجزاء مرزی
۲۹۷	۱.۶.۱۲. عناصر ثابت

۲۹۸	۱.۱.۶.۱۲. محاسبه انتگرال‌ها
۳۰۱	۲.۱.۶.۱۲. تشکیل دستگاه معادلاتی
۳۰۵	۲.۶.۱۲. عناصر پیوسته خطی
۳۱۱	۳.۶.۱۲. عناصر خطی گسسته
۳۱۶	۷.۱۲. زیر ناحیه‌ها
۳۱۷	مسائل

۳۱۹	پیوست‌ها
۳۲۱	پیوست الف: خطا
۳۲۷	پیوست ب: سیستم‌های مختصاتی
۳۳۷	پیوست ج: جدول گاوس - لژاندر
۳۳۸	پیوست د: برنامه‌های کامپیوتری برای حل مسائل میدان
۳۷۷	پیوست ه: برنامه‌های کامپیوتری برای حل مسائل پتانسیل
۳۹۰	پیوست و: جدول تابعی
۳۹۱	پیوست ز: معادلات ماکسول
۳۹۹	پیوست ح: دستورات متلب

۴۰۵	منابع
۴۰۷	واژه‌نامه فارسی-انگلیسی
۴۱۱	واژه‌نامه انگلیسی-فارسی
۴۱۵	نمایه

این سخن می‌شنیدم از اعضا
بهر حتی الورد و الشریان
که یکی هست و پنج نیست جز او
و حده لاله الالهو

پیشگفتار

امروزه، همراه با پیشرفت سریع و چشمگیر کامپیوتر، روش‌های محاسبات عددی جزو دروس دانشگاهی رشته‌های علوم و مهندسی مطرح است. روش‌های محاسبات عددی از ابزارهای سودمند در حل بسیاری از مسائل علمی پژوهشی است و می‌توان با کمک آن مسائلی را که تاکنون قابل حل نبوده یا برای حل آن‌ها به صرف زمان زیادی نیاز است تجزیه و تحلیل کرد.

کتابی که پیش رو دارید مفاهیم اساسی در روش‌های محاسبات عددی را معرفی می‌کند و امید است برای دانشجویان رشته‌های علوم و مهندسی مفید باشد. در این کتاب سعی شده است مطالب به زبانی ساده بیان شود تا فهم آن برای خوانندگان آسان باشد. همچنین با ارائه مثال‌های متنوع در هر قسمت درک و کاربرد موضوع مربوط نیز مشخص شود.

هدف از تألیف این کتاب، در دسترس قرار دادن مجموعه‌ای خودآموز از مباحث محاسبات عددی است که از مبانی آغاز شده و در مورد روش‌های گوناگون به بحث و بررسی مفصل پرداخته است. در بخش‌های نخست این کتاب مبانی و نظریه‌ها مطرح شده است و در دو بخش پایانی به حل مسائل تخصصی و پیچیده‌تری که برای حل آن‌ها از این مبانی استفاده می‌کنیم، پرداخته‌ایم. سعی اصلی بر این بوده است که همه موضوعات مطرح در محاسبات عددی بیان شود. در پایان همه مباحث، مثال‌های کاربردی متعددی با راه‌حل‌های گوناگون حل شده است تا مطالب برای دانشجویان کاملاً روشن شود.

نحوه تنظیم مطالب کتاب چنین است: فصل اول در مورد سری تیلور تابعی از یک و دو متغیر بحث می‌کند. در فصل دوم حساب تفاضل محدود پیشرو، پسرو و مرکزی و در فصل سوم درون‌یابی و برون‌یابی به روش‌های گوناگون بررسی می‌شود. فصل چهارم به یافتن ریشه معادلات با استفاده از روش‌های مختلف اختصاص دارد. فصل پنجم به حل دستگاه معادلات جبری اعم از خطی و غیرخطی اشاره می‌کند. در فصل ششم برآزش منحنی با استفاده از حداقل مربعات و تقریب توابع پیوسته و در فصل هفتم

انتگرال گیری عددی آمده است. فصل هشتم حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی را به روش های گوناگون بررسی می کند. در فصل نهم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ارائه شده است. فصل دهم به روش های حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره ای به روش تفاضل محدود می پردازد. فصل یازدهم به روش اجزای محدود به دو روش گلرکین و تغییراتی (ریتز) برای حل مسائل اسکالر در نواحی یک بعدی و دو بعدی با شرایط مرزی، که یکی از جدیدترین شیوه های محاسباتی پر قدرت برای حل مسائل پیوسته است، اختصاص یافته است. در بخش پیوست ها بحثی در زمینه خطاها، جداول مربوط به روش های محاسباتی، سیستم های مختصاتی و دو برنامه کامپیوتری به روش اجزای محدود و روش اجزای مرزی و بالاخره تابعی بعضی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و چگونگی به دست آوردن آنها با استفاده از معادلات ماکسول مطرح شده است. در آخر هم بحث کوتاهی در مورد چگونگی استفاده از دستورات متلب (MATLAB) برای به دست آوردن بعضی از محاسبات آمده است.

امید است این کتاب مقدمه ای برای آغاز بررسی روش های محاسبات عددی باشد و دانشجویانی که این درس را می گذرانند یا دیگر عزیزانی که به تحلیل مسائل گوناگون علمی علاقه مندند به نحو شایسته از این کتاب در مطالعات خود سود برند.

در خاتمه از دوستانی که مرا در این مهم یاری کرده اند سپاسگزارم و برای ایشان از خداوند منان توفیق روزافزون مسئلت دارم؛ به ویژه از همسر، به خاطر صبر و شکیبایی در همه مراحل تدوین و نگارش این کتاب، که با بردباری مشوق من بوده است.

وظیفه خود می دانم از زحمات سرکار خانم آذر مه سنجری، خانم مهندس شبتم عطایی، خانم مهندس لیلا کاظمی و آقایان حسین اظهري، هادی عبدی، علیرضا قره چاهی، مهندس آقازاده، مهندس محمد مهدوی، مهندس عقیل قاهری، مهندس امیر حسین گوهری، مهندس رضا نقاش، مهندس محمد بابایی و سرکار خانم فاطمه میرزایی که مرا در تهیه این کتاب بسیار یاری کردند، و خانم سمیرا دهقان برای صفحه آرایی کتاب تشکر کنم.

با وجود تلاش های فراوان در ویرایش و تهیه این کتاب، بدیهی است که این اثر هنوز کاستی هایی دارد. از استادان محترم و دانشجویان عزیز خواهشمندم هرگونه کاستی و نقص در این اثر را با دیده اغماض بنگرند و برای اصلاح چاپ های بعدی مرا از طریق نشانی e-afjei@sbu.ac.ir راهنمایی فرمایند.

سیدابراهیم افجه ای

۱۳۹۵

شانزده

سری تیلور

مقدمه

سری تیلور مبنای روش‌های محاسبات عددی است. در بسیاری از محاسبات، از جمله محاسبه خطاها، مستقیماً از سری تیلور استفاده می‌شود. به همین دلیل و نیز برای یادآوری، این روش به اختصار بیان می‌شود. سری تیلور، به صورت سری توانی نامتناهی بیان می‌شود و می‌تواند یک تابع را در شعاعی معلوم اطراف یک نقطه به طور دقیق نمایش دهد.

۱.۱. سری تیلور تابعی از یک متغیر

اگر تابع f اطراف $x = a$ معین باشد، یا به عبارت دیگر، در این ناحیه مشتق‌های پیوسته داشته باشد، می‌توان آن را به صورت یک سری توانی نامتناهی همگرای یکتا به نام سری تیلور، به صورت زیر برای نقطه x نزدیک a نمایش داد.^۱

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots \quad 1.1$$

اگر سری به دست آمده همگرا باشد، مقدار $f(x)$ با به کارگیری تعداد نامتناهی از جملات دقیقاً محاسبه می‌شود. برای این که دریابیم که مقدار $f(x)$ به دست آمده برای $x = a$ تا چه حد دقیق است، به این مثال توجه کنید:

فرض کنید می‌خواهیم مقدار $f(b)$ را با استفاده از سری ۱.۱ به دست آورده و به صورت ترسیمی نشان دهیم. خواهیم داشت:^۲

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots \quad 2.1$$

1. Louis Leithold, *The Calculus with Analytic Geometry*, New York, Harper & Row, 1976. Pp. 729-737.

2. Robert W. Hornbeck, *Numerical Methods*, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1975, pp. 7-9.